

L3-Seminar: Geschichte der Mathematik

Dr. Ben Heuer

Blockseminar 20.02–24.02.2023

In diesem L3-Seminar beschäftigen wir uns mit der frühen Geschichte der Mathematik, von Ägypten und Mesopotamien über das antike Griechenland, Indien und China bis zum mittelalterlichen Islam. Wir wollen uns anschauen, welche Fragesstellungen in den Anfängen der Mathematik untersucht wurden, welche grundlegenden Methoden man für deren Beantwortung entwickelte, und welchen Einfluss diese auf die moderne Mathematik haben.

Der Fokus des Seminars liegt darauf, einen möglichst breiten Überblick über die frühe Geschichte der Mathematik zu geben. Wir wollen dabei über den Tellerrand der europäischen mathematischen Tradition hinausschauen und auf möglichst viele verschiedene Orte mathematischer Entwicklung eingehen. Umgekehrt bedeutet das aber, dass wir jeweils nur einen kleinen Ausschnitt der mathematischen Werke der jeweiligen Zeiten besprechen können.

Wir gehen hierfür annähernd chronologisch vor. Dies bedeutet aber nicht notwendigerweise, dass die Mathematik der jeweiligen Epochen aufeinander aufbaut: Zwar gibt es sehr viele interessante Berührungspunkte, häufig sind mathematische Entwicklungen aber auch unabhängig voneinander betrieben worden. Entsprechend können in unserem Seminar auch die Vorträge weitgehend unabhängig voneinander vorbereitet werden.

Einige grundsätzliche Hinweise zur Vortragsgestaltung: Zu jedem Vortrag ist ein inhaltlicher Rahmen vorgegeben, für den entsprechende Literatur angegeben ist, die in der Bibliothek des Instituts verfügbar ist. Die genaue Auswahl des Materials und die Ausgestaltung des Vortrags ist dabei Ihnen überlassen. Insbesondere ist keinesfalls verlangt, dass der gesamte Inhalt der angegebenen Literatur wiedergegeben werden soll – das wäre in der angegebenen Zeit auch gar nicht möglich. **Stattdessen ist es ein wichtiger Teil der Aufgabe der Vorbereitung Ihres Vortrags, Inhalte zu kuratieren.** Stellen Sie also die wichtigsten Punkte heraus, wählen Sie hilfreiche Beispiele aus und tragen Sie diese zu einem kohärenten Vortrag zusammen (üblicherweise als Tafelvortrag). Dieser soll 90 Minuten dauern, auf keinen Fall länger, aber auch nicht wesentlich kürzer ($>75\text{min}$). Sie können die Themenvorgabe Ihres Vortrages auch noch modifizieren (z.B. wenn Sie einschätzen, dass der Vortrag zu lang wird), sofern Sie dies mit mir im Vorfeld absprechen.

Natürlich ist für uns auch die Einordnung in den historischen Kontext von Interesse, also der gesellschaftliche Rahmen, in dem Mathematik entwickelt wird, biografische Daten einzelner Personen, und die Quellenlage. Beachten Sie dabei aber bitte, dass dies ein mathematisches Seminar ist, das heißt der *Schwerpunkt* der Vorträge soll jeweils nicht auf den historischen oder ethnologischen Aspekten liegen, sondern auf den mathematischen.

Beachten Sie noch, dass einige Bücher in englischer Sprache verfasst sind, die Vorträge werden aber natürlich auf Deutsch sein.

Kontaktieren Sie mich im Vorfeld des Seminars rechtzeitig, am besten mindestens zwei Wochen vor dem Seminar, damit wir eine Vorsprechung vereinbaren können, in der wir Ihre Ausarbeitung des Vortrags besprechen und gegebenenfalls Fragen beantworten können.

Vortrag 0: Einführung

Im ersten Vortrag werde ich einen kurzen Überblick über den Inhalt des Seminars geben. Insbesondere werde ich eine kurze geschichtliche Übersicht über die im Seminar behandelten Kulturen geben. Außerdem beschäftigen wir uns eingehend mit der Frage, *warum* verschiedene Kulturen unabhängig voneinander begonnen haben, mathematische Techniken zu entwickeln.

Vortrag 1: Die Geschichte der Zahlensysteme

Geben Sie eine Einführung in die Geschichte der Zahlen- und Ziffernsysteme, also in die verschiedenen Systeme, mit denen Zahlen schriftlich dargestellt wurden. Orientieren Sie sich dabei an [Bau69, §2]. Beginnen Sie mit dem Zahlensystem der Ägypter [Bau69, §2, S.38ff]. Besprechen Sie ausführlich das Sexagesimalsystem der Babylonier [Bau69, §2, S.36ff]. Gehen Sie im Anschluss kurz auf griechische und römische Zahlensysteme ein [Bau69, §2, S.40-43], dann ausführlich auf die Entwicklung des Dezimalsystems im Alten Indien und mittelalterlichen Islam [Ber11, Kapitel 2 §3][Bau69, §2, S.46-50]. Falls die Zeit dies zulässt, wäre es außerdem interessant, kurz auf das chinesisch-japanische System [Bau69, §2, S.43-44] und das Zahlensystem der Maya einzugehen [Bau69, §2, S.45-46].

Vortrag 2: Mathematik im Alten Ägypten

Besprechen Sie zunächst in welcher Form uns mathematischen Texte aus dem alten Ägypten erhalten sind [Vog58, I.3]. Gehen Sie noch einmal kurz auf das ägyptische Zahlensystem ein, welches bereits in Vortrag 1 erwähnt wird [Vog58, II.1]. Besprechen Sie dann im Detail die ägyptische Arithmetik, nämlich elementare Operationen [Vog58, III.1] und Bruchrechnung mithilfe von Stammbrüchen und Komplementärbrüchen [Vog58, III.2-3]. Diskutieren Sie kurz den Vergleich zur heutigen Bruchrechnung [Vog58, III.7]. Stellen Sie dann einige Beispiele von *Hau*-Rechnungen vor ([Vog58, IV.2], die die Anwendung der arithmetischen Techniken sowie die Grundzüge von Algebra demonstrieren (z.B. "1. Methode" auf S. 54f).

Falls die Zeit dies zulässt, können Sie noch kurz auf die Anwendung der Arithmetik auf geometrische Berechnungen eingehen: Besonders erwähnenswert wären hier die Ägyptische Näherung von π [Vog58, V.2.6] (siehe auch [VdW83, S.170f]) und die Volumenformel für den Pyramidenstumpf (V.3.6).

Vortrag 3: Mathematik in Mesopotamien

Fassen Sie zunächst die Quellenlage zu mathematischen Texten Mesopotamiens zusammen [Vog59, I.4.1-3]. Erinnern Sie dann noch einmal kurz an das babylonische Sexagesimalsystem [Vog59, I.2.2, II.1, II.4], welches in Vortrag 1 bereits erwähnt wird. Gehen Sie kurz auf die Grundrechenarten ein [Vog59, III.1-2], dann auf Potenzieren und Radizieren [Vog59, III.4].

Besprechen Sie im Detail die Näherungen von $\sqrt{2}$ in [Vog59, III.4.4-5]. Geben Sie geeignete Beispiele für die babylonische Algebra [Vog59, V], insbesondere Rechnen mit zwei Unbekannten [Vog59, V.1.2a)] und quadratische Gleichungen [Vog59, V.2]. Erwähnen Sie noch das Auftreten von sogenannten pythagoräischen Zahlentripeln [Vog59, IV.2a]. Gehen Sie in diesem Zusammenhang kurz auf geometrische Leistungen ein, in dem sie [Vog59, VI.2.1a-b] besprechen.

Abschließend können Sie dann je nach der verbliebenen Zeit noch den Einfluss der babylonischen Mathematik auf die nachfolgende Mathematik betrachten [Vog59, VII].

Vortrag 4: Antikes Griechenland I: Die Ionier

Besprechen Sie zunächst den historischen Kontext der Entstehung der Mathematik im antiken Griechenland [Her04, §2.1]. Erwähnen Sie dabei insbesondere den Einfluss der mathematischen Leistungen in Ägypten (siehe auch [VdW83, S.87f]).

Stellen Sie dann Thales von Milet vor (oft als “erster namentlich bekannter Mathematiker” bezeichnet) und besprechen Sie den Satz des Thales mit Beweis [Her04, §3.1].

Besprechen Sie dann die Person Pythagoras von Samos und die Pythagoräer. Diskutieren Sie ihre mathematischen Errungenschaften [Her04, §4.1-3], indem Sie einige Beispiele auswählen. Erwähnen Sie insbesondere mit geschichtlicher Einordnung die Entdeckung der Irrationalität von $\sqrt{2}$ (siehe [Gro09, §2.1.4.2]), den Satz des Pythagoras [Her04, §4.5], sowie pythagoräische Tripel und deren Parameterdarstellung [Her04, §4.6].

Stellen Sie schließlich Hippokrates von Chios und seine “Möndchen” vor [Gro09, §2.1.3.2], inklusive Beweisskizze falls die Zeit dies zulässt (siehe auch [Her04, §5]).

Vortrag 5: Antikes Griechenland II: Die Athener

Besprechen Sie zunächst den geschichtlichen Kontext der Athener Periode und skizzieren Sie insbesondere den Einfluss der griechischen Philosophie, insbesondere Platons, auf die Mathematik [Her04, §6.1-6.2].

Gehen Sie kurz auf Eudoxos von Knidos und seine “Proportionenlehre” ein.

Besprechen Sie dann im Detail die Methode der “Konstruktion mit Zirkel und Lineal” und die sogenannten “klassischen Probleme der Antike” [Her04, §11][Gro09, §2.2.1], also

- die Quadratur des Kreises [Her04, §11.4],
- die Würfelverdopplung [Her04, §11.5],
- die Winkeldreiteilung [Her04, §11.3].

Skizzieren Sie sehr kurz, wie diese auf algebraische Fragen zurückgeführt werden können, und dass in der Moderne die Unmöglichkeit aller drei Konstruktionen bewiesen wurde.

Wenn die Zeit dies zulässt, bietet es sich an, außerdem kurz Theodoros von Kirene und seine Wurzelspirale zu erwähnen.

Vortrag 6: Antikes Griechenland III: Die Alexandriner, Teil 1

Besprechen Sie kurz den historischen Kontext in dem sich Alexandria zum Zentrum der griechischen Mathematik entwickelt [Her04, §9, S.125-133].

Stellen Sie nun erstens Euklid von Alexandria vor [Sch03, S.1-16] (siehe auch [Her04, §10, S.139-144]). Besprechen Sie dann Euklids Werk *Elemente*: Geben Sie eine Übersicht über den Inhalt [Sch03, §4, S.131-138]. Besprechen Sie dann als wichtiges Beispiel Euklids Axiomatisierung der Geometrie: Stellen Sie hierfür zumindest einen Auszug der Definitionen vor und besprechen sie insbesondere das Parallelenaxiom [Sch03, §4.2, S.148-155] (siehe auch [Her04, §10.7]).

Stellen Sie zweitens Archimedes von Syrakus vor [Her04, §11]. Besprechen Sie Beispiele seiner mathematischen Beiträge; hier bieten sich insbesondere seine Annäherung der Kreiszahl π [Her04, §12.4] und seine Berechnung des Verhältnis von Kugelvolumen zu Zylindervolumen an [Her04, §12.11].

Vortrag 7: Antikes Griechenland VI: Die Alexandriner, Teil 2

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Erathostenes, Appolonius und Diophantus.

Stellen Sie zunächst Erathostenes von Kyrene vor [Her04, §13]. Besprechen Sie ausführlich das Sieb des Erathostenes [Her04, §13.1] und Erathostenes' Methode zur Berechnung des Erdumfangs [Her04, §13.2].

Besprechen Sie dann kurz Appolonius von Perga [Her04, §15] und das nach ihm benannte "Berührproblem" [Her04, §15.3], insbesondere die berühmten "Appolonischen Kreise".

Stellen Sie drittens noch kurz Diophantos von Alexandrien vor [Her04, §21] und besprechen Sie beispielhaft [Her04, §21.1, Aufgabe I, 17]. Da dies der letzte Vortrag zum antiken Griechenland ist, würde es Sinn ergeben, hier kurz auf die Bedeutung von Diophantischen Gleichungen in späteren Epochen einzugehen [Her04, §21.7, Aufgabe I, 17].

Vortrag 8: Mathematik im Alten Indien

Besprechen Sie den historischen Kontext der Mathematik in der frühen Geschichte Indiens [Her16, §3, S.63-72].

Stellen Sie dann zuerst mathematische Leistungen von Brahmagupta vor: Besprechen Sie zunächst seine systematische Einführung der 0, und seine Behandlung von Rechenregeln für negative Zahlen [IRD⁺21, S.428-434].

Erwähnen Sie weiter Brahmaguptas allgemeine Lösung quadratischer Gleichungen. Besprechen Sie kurz (ohne Beweis) den nach Brahmagupta benannten Satz über Sehnenvierecke [Her16, §3, S. 70f].

Besprechen Sie dann im Detail die Erkenntnisse von Brahmagupta und Bhaskara II zu Diophantischen Gleichungen der Form $x^2 - Dy^2 = 1$ (heute irreführend "Pellsche Gleichung" genannt) [Her16, §3.11.1 und §3.11.3]. Besprechen Sie hierfür mindestens [Her16, Lemma 1 und 2 in 3.11.1] mit Beweis und einige illustrierende Beispiele (alternativ finden Sie hierzu auch Hinweise in [VdW83, §5 Part B, S.134 und S.146ff] und [Mar97, I, part 10, S.89-91]).

Vortrag 9: Mathematik im Alten China

Beginnen Sie mit einer kurzen Zusammenfassung des historischen Kontext, und der weitgehend offenen Frage nach dem mathematischen Austausch mit anderen Kulturen des Altertums (siehe z.B. [Mar97, I, part 10, S.89-91]).

Stellen Sie dann die "Neun Kapitel der Rechenkunst" (*Jiu Zhang Suanshu*) vor ([VdW83, S. 36ff]), in dem sie kurz historischen Kontext und den Inhalt zusammenfassen (weitere Hinweise hierzu finden Sie in [Mar97, §11, insbesondere S. 127ff], welches Sie aber nicht im Detail besprechen müssen). Besprechen Sie dann als Beispiel detailliert den heute sogenannten "Euklidischen Algorithmus" [Mar97, S.37f]. Erwähnen Sie außerdem kurz die Berechnung von Quadratwurzeln [Mar97, S.45f] und den Chinesischen Restsatz [Mar97, S.121].

Geben Sie als zweites Thema Beispiele für die Arbeiten von *Liu Hui* indem Sie das Problem der "Insel im Meer" besprechen [Mar97, S.193ff] (siehe auch [VdW83, Chapter 7]).

Erwähnen Sie noch die Annäherungen der Kreiszahl π (siehe [VdW83, S.196f]), sofern die Zeit dies zulässt.

Vortrag 10: Mathematik im Mittelalterlichen Islam

Geben sie zunächst einen kurzen historischen Überblick anhand von [Ber11, Kapitel 1, §1-2], und besprechen Sie dabei kurz die Einflüsse der griechischen und indischen Mathematik. Gehen Sie in diesem Zusammenhang dann zunächst kurz auf die Entwicklung der Dezimalbrüche durch al-Uqlidisi ein [Ber11, Kapitel 2 §3]).

Stellen Sie den Gelehrten Al-Khwarizmi und seine “Algebra” vor [Ber11, Kapitel 1, §3 und Kapitel 4 §1,2,3]). Gehen sie außerdem auf Thabits [Ber11, Kapitel 4, §4] und Abu Kamils [Ber11, Kapitel 4, §5] Weiterentwicklungen ein.

Falls die Zeit dies zulässt können Sie noch kurz auf weitere Errungenschaften der islamischen Mathematik eingehen, z.B. die Entwicklung der sechs trigonometrischen Funktionen [Ber11, Kapitel 5, §2], oder al-Kashis Berechnung der ersten 16 Dezimalstellen (!) von π .

References

- [Bau69] John K Baumgart. *Historical topics for the mathematics classroom*, volume 31. National Council of teachers of Mathematics, 1969.
- [Ber11] J Lennart Berggren. *Mathematik im mittelalterlichen Islam*. Springer-Verlag, 2011.
- [Gro09] Detlef Gronau. Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, 2009. Verfügbar auf <https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gm.pdf>.
- [Her04] Dietmar Herrmann. *Die antike Mathematik – Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus*. 2004.
- [Her16] Dietmar Herrmann. *Mathematik im Mittelalter*. Springer, 2016.
- [IRD⁺21] Annette Imhausen, Eleanor Robson, Joseph Warren Dauben, Kim Plofker, and J Lennart Berggren. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. Princeton University Press, 2021.
- [Mar97] Jean-Claude Martzloff. *A history of Chinese mathematics*. Springer, 1997.
- [Sch03] Jürgen Schönbeck. *Euklid um 300 v. Chr*, volume 12 of *Vita Mathematica*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [VdW83] Bartel L Van der Waerden. *Geometry and algebra in ancient civilizations*. Springer Science & Business Media, 1983.
- [Vog58] Kurt Vogel. *Vorgriechische Mathematik I: Vorgeschichte und Ägypten*. Schöningh, 1958. Hinweis: Bitte beachten Sie, dass das Buch von 1959 und die Sprache dadurch zum Teil etwas veraltet ist (es ist also selbst ein historisches Dokument). Dies beeinflusst aber weder die Lesbarkeit noch die besprochene Mathematik.
- [Vog59] Kurt Vogel. *Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier*. Schöningh, 1959. Hinweis: Bitte beachten Sie, dass das Buch von 1958 und die Sprache dadurch zum Teil etwas veraltet ist (es ist also selbst ein historisches Dokument). Dies beeinflusst aber weder die Lesbarkeit noch die besprochene Mathematik.