L3-/Proseminar: Quadratische Formen

Prof. Dr. Annette Werner, Dr. Ben Heuer

Blockseminar 25.03–28.03.2024

In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit den algebraischen Grundlagen der Theorie der quadratischen Formen. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine quadratische Form über K ist eine Funktion

$$f : K^n \to K, \quad x_1, \ldots, x_n \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

für gegebene $\alpha_{ij} \in K$. Zum Beispiel ist

$$f(x, y) := x^2 + 3y^2 + 5xy$$

eine binäre quadratische Form über $\mathbb{Q}$. Die Theorie der quadratischen Formen ist von großer mathematischer Schönheit und Tiefe. Da sie eng mit Bilinearformen verwandt sind, gelten quadratische Formen heute oft als Teil der linearen Algebra. Sie sind aber auch in Zahlentheorie und Geometrie von Bedeutung. Zwei zentrale Fragen, welche wir in diesem Seminar behandeln wollen, sind:

- Wie können wir quadratische Formen über einem Körper K klassifizieren?
- Es sei f eine quadratische Form über K und $m \in K$ gegeben. Wie können wir bestimmen, ob die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = m$ eine Lösung mit $x_1, \ldots, x_n \in K$ hat?

Quadratische Formen sind seit der Antike bekannt und haben in der Entwicklung der modernen Mathematik immer wieder eine wichtige Rolle gespielt. Über mehrere Jahrhunderte hinweg haben die führenden Mathematiker Ihrer Zeit – Fermat, Lagrange, Euler, Gauss und viele weitere – wichtige Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen geliefert, und diese haben dadurch eine wegweisende Rolle insbesondere in der Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie eingenommen. Ausgehend von der Entwicklung der abstrakten Algebra zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden dann bedeutende Fortschritte zur Klassifikation und Lösbarkeit quadratischer Formen erzielt, unter anderem von Hasse, Minkowski, Witt und Pfister, die ihrerseits wiederum Einfluss auf die Entwicklung der Algebra und zum Beispiel der arithmetischen Geometrie hatten.

Auf beide Entwicklungsstränge wollen wir in diesem Seminar eingehen: Unsere Hauptreferenz hierfür ist das Buch [Sch85] von Winfried Scharlau, welches als Ebook in der Bibliothek verfügbar ist. Beachten Sie, dass die Quellen auf englisch geschrieben sind, der Vortrag soll aber als Tafelvortrag auf Deutsch gehalten werden. Unklarheiten bei der Übersetzung können gegebenenfalls bei der Vorbesprechung geklärt werden.

Kontaktieren Sie bitte Herrn Heuer im Vorfeld des Seminars rechtzeitig, am besten mindestens drei bis vier Wochen vor dem Seminar, damit wir eine Vorsprechung vereinbaren können. Hier haben Sie die Möglichkeit, die Ausarbeitung Ihres Vortrags zu besprechen und Fragen zu stellen. Diese Vorbesprechung kann auf zoom erfolgen.

Beachten Sie bitte auch unsere allgemeinen Tipps und Hinweise zur Vorbereitung eines gelungenen Seminarvortrages unter folgendem Link: https://www.uni-frankfurt.de/134848419.pdf.

Vortrag 1: Bilinearformen und Quadratische Formen

Referenz: [Sch85, §1.1-1.2, S.1-6]

Besprechen Sie die Definition von Bilinearformen (Definition 1.1) und Isometrien (Definition 1.4). Beweisen Sie Lemma 1.5. Definieren Sie dann quadratische Formen (Definition 1.7) und besprechen Sie im Detail die Äquivalenz zwischen quadratischen Formen und Bilinearformen im Falle $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ (Lemma 1.8, Remark 1.9). Besprechen Sie dann noch die Matrixschreibweise, §2 bis zum dritten Satz auf Seite 6 ("Each problem...").

Vortrag 2: Orthogonale Zerlegung

Referenz: [Sch85, §1.2-§1.3, S.6-8]

Besprechen Sie die adjungierte Transformation (S.6 ab "For V a vector space...", Definition 2.3 und Lemma 2.4). Führen Sie den Begriff der Orthogonalität ein (Definition 1.2, Lemma 1.3) und beweisen Sie Lemma 2.5.

Besprechen Sie zweitens die Orthogonalzerlegung, §3 bis einschließlich Lemma 3.7. Folgern Sie, dass jede quadratische Form äquivalent ist zu einer quadratischen Form

$$q(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^n + \cdot + \alpha_n x_n^2$$

für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

Vortrag 3: reguläre Unterräume

Referenz: [Sch85, §1.3]

In diesem Vortrag geht es darum, die Klassifikation bilinearer Räume auf jene regulärer Räume zurückzuführen. Besprechen Sie hierfür zunächst Theorem 3.8 mit Beweis. Besprechen Sie reguläre Komponenten (Definition 3.9 und Corollary 3.10). Beweisen Sie Lemma 3.11 und Corollary 3.12.

Definieren Sie als zweites Thema die orthogonale Summe bilinearer Räume (Definition 3.13). Geben Sie dann Beweise für die Aussagen in Definition 3.13, Lemma 3.14 und Lemma 3.15. Besprechen Sie schließlich noch die Determinante, Definition 3.16 und 3.17.

Vortrag 4: Hyperbolische Räume

Referenz: [Sch85, §1.4]

Erklären Sie den Begriff des isotropen bilinearen Raumes, indem Sie Definition 4.1 vollständig besprechen. Besprechen Sie dann hyperbolische Räume (Lemma 4.2 und Definition 4.3). Diskutieren Sie Lemma 4.4 und geben Sie einen Beweis.

Beweisen Sie dann die Charakterisierung hyperbolischer Räume in Theorem 4.5 und Corollary 4.6. Geben Sie Definition 4.7 und folgern Sie Corollary 4.8 und 4.9. Wenn die Zeit dies zulässt, können Sie außerdem noch kurz Definition 4.10 und Lemma 4.11 besprechen.

Vortrag 5: Der Satz von Witt

Referenz: [Sch85, §1.5]

In diesem Vortrag beweisen wir einige zentrale Strukturresultate über bilineare Räume:

Besprechen Sie zunächst Reflexionen (Definition 5.1, Lemma 5.2). Diskutieren Sie dann Theorem 5.3 (Satz von Witt) und Theorem 5.5 mit Beweis (insbesondere Lemma 5.6). Erwähnen Sie kurz die genauere Aussage Theorem 5.4 ohne Beweis.

Folgern Sie dann den Kürzungssatz von Witt (Corollary 5.8) und besprechen Sie Corollary 5.9 und Definition 5.10, und schließlich den Zerlegungssatz Corollary 5.11.

Vortrag 6: Der Grothendieck–Witt Ring: Konstruktion

Referenz: [Sch85, §2.1], S.29-33 bis einschließlich Remark 1.10.

Definieren Sie den Raum $\hat{W}^+(K)$ der Isometrieklassen quadratischer Formen und erläutern Sie dessen Halbgruppen-Struktur (S.29). Besprechen Sie die Konstruktion der Grothendieck-Gruppe (Theorem 1.1 und Lemma 1.3). Geben Sie kurz das Beispiel $R^+ = \mathbb{N}$ und $R = \mathbb{Z}$.

Besprechen Sie dann die Multiplikationsstruktur auf $\hat{W}^+(K)$, indem Sie das Kronecker-Produkt $\otimes$ einführen (Definitionen 1.4 und 1.7). Erwähnen Sie hierfür ggf. auch Remark 1.12.(ii). Beweisen Sie Lemma 1.5, Corollary 1.6 und Theorem 1.8. Definieren Sie schließlich den Grothendieck–Witt ring (Definition 1.9) und besprechen Sie im Detail Remark 1.10.

Hinweis: Um die Konstruktionen zu motivieren, könnte es Sinn ergeben, erst $\otimes$ zu besprechen und erst dann Theorem 1.1 zu besprechen. Diese Entscheidung ist Ihnen überlassen.

Vortrag 7: Der Grothendieck–Witt Ring: Eigenschaften & Beispiele

Referenz: [Sch85, §2.1-§2.3], S.34-37 und S.39.

Beweisen Sie Theorem 1.11. Stellen Sie dann Dimension und Determinante als Morphismen von $\hat{W}(R)$ vor, besprechen Sie hierfür im Detail §2.2 bis einschließlich Definition 2.1. Beweisen Sie als Anwendungen Theorem 3.1.

Besprechen Sie dann Lemma 3.7 ohne Beweis[1] und folgern Sie daraus Theorem 3.8. Um die Bedeutung dieses Resultats zu unterstreichen, erwähnen Sie als Anwendung noch ohne Beweis Corollary 3.11 (S.40), sowie Theorem 3.4 aus Kapitel 5 (S. 175).

Vortrag 8: Der Grothendieck–Witt Ring: geordnete Körper

Referenz: [Sch85, §2.4], S.40-44

Führen Sie geordnete Körper ein (Definition 4.1 und Remark 4.2). Besprechen Sie den Sylvesterschen Trägheitssatz in diesem Kontext (Definition 4.3 und Theorem 4.4) und die Signatur als Homomorphismus von $\hat{W}(R)$ (Definition 4.5).

Beweisen Sie als zweiten Teil Ihres Vortrags die Strukturaussagen über $\hat{W}(R)$ für euklidische und pythagoräische Körper aus Corollary 4.8 und Theorem 4.10 (hier reicht es aus, (i)$\Leftrightarrow$ (ii) zu zeigen) und Remark 4.11. Erwähnen Sie das Beispiel $K = \mathbb{R}$.

Vortrag 9: Der Satz von Pfister

Referenz: [Sch85, §2.10], S.69-72 bis einschließlich Definition 10.10.

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit der Frage, welche $\alpha \in K$ sich als Lösungen einer gegebenen quadratischen Form $q : V \to K$ schreiben lassen, also $\alpha = q(x)$ für ein $x \in V$.

Definieren Sie multiplikative quadratische Räume (Definition 10.1) und besprechen Sie im Detail den Beweis von Lemma 10.4. Besprechen Sie dann den Satz von Pfister (Corollary 10.5) und behandeln Sie auch die historischen Beispiele für $n = 0, 1, 2$ auf S.71.

Besprechen Sie als zweite Anwendung Definition 10.6 und Theorem 10.8. Besprechen Sie schließlich noch die Definition der Pfister-Form (Definition 10.10).

Vortrag 10: Quaternionalgebren

Referenz: [Sch85, §2.11], S.74-78 bis einschließlich Definition 11.12.

In diesem Vortrag geht es um eine algebraische Struktur, die nützlich ist um quadratische Formen zu studieren: Quaternionalgebren. Besprechen Sie Definition 11.1 und geben Sie kurz das Beispiel der Hamilton-Quaternionen $K = \mathbb{R}$, $(a, b) = (-1, -1)$. Besprechen Sie dann die

[1] Vorsicht, hier ist ein kleiner Tippfehler im Buch: statt $\mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^\times$ sollte hier $\mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^{\times 2}$ stehen.

Lemmas 11.2 bis 11.6, und definieren Sie Spur und Norm (Definition 11.5). Besprechen Sie im Detail Remark 11.7 um den Zusammenhang zu quadratischen Formen zu illustrieren.

Erläutern Sie als zweites Thema, wie man Quaternionalgebren benutzt, um Äquivalenzen quadratischer Formen zu studieren (Theorem 11.9–Theorem 11.12 mit Korollaren).

Vortrag 11: Binäre Quadratische Formen über $\mathbb{Z}$ nach Gauß

Referenz: [Cox13, §2A]

Führen Sie binäre quadratische Formen über $\mathbb{Z}$ ein, und definieren Sie, wann diese "primitiv" sind. Besprechen Sie die Begriffe der Äquivalenz und eigentlichen Äquivalenz. Definieren Sie die Determinante. Besprechen Sie dann im Detail Theorem 2.8 von Gauß mit Beweis. Stellen Sie außerdem die daran anschließende Diskussion vor, bis einschließlich Theorem 2.12. Geben Sie dann noch die Tabelle (2.14) an (erste 5 Einträge).

Hinweis: Weitere Informationen, insbesondere zu den Beweisschritten in Theorem 2.8, finden Sie in [SO80, S.36-38]. Ob Sie dieses Buch hinzuziehen wollen, ist aber Ihnen überlassen.

Vortrag 12: Primzahlen als Summe von Quadraten nach Lagrange

Referenz: [Cox13, §1, §2A-B]

Ziel des Vortrags ist der Beweis des folgenden Satzes von Fermat ([Cox13, Theorem 1.2]):

Satz: Für eine Primzahl $p > 2$ gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $p = x^2 + y^2$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \bmod 4$.

Erklären Sie hierfür zunächst, was es bedeutet, dass $m \in \mathbb{Z}$ durch eine quadratische Form "dargestellt" bzw. "eigentlich dargestellt" wird (§A, (2.1)). Besprechen Sie die Verbindung zu eigentlicher Äquivalenz (Lemma 2.3). Geben Sie die Definition des Legendre-Symbols (S.12) und besprechen Sie Lemma 2.5, Corollary 2.6 und die Diskussion unten auf S.24. Folgern Sie Proposition 2.15. Mithilfe von Tabelle (2.14) zeigt dies, dass es für eine Primzahl $p > 2$ genau dann $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $p = x^2 + y^2$, wenn $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$.

Zeigen Sie nun Lemma 1.7. Erklären Sie schließlich Eulers Beweis dass $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ genau dann wenn $p \equiv 1 \bmod 4$ (Mitte S.11). Alternativ können Sie hierfür [Sch85, Lemma 3.9] verwenden. Dies beweist den Satz von Fermat!

Wenn die Zeit dies zulässt, können Sie noch skizzieren, wie man auf ähnliche Weise erklären kann, welche Primzahlen von der Form $x^2 + 3y^2$ und $x^2 + 7y^2$ sind ([Cox13, 2§B])

Hinweis: Es ist sicher hilfreich (und spannend!) zur Vorbereitung Ihres Vortrags zunächst [Cox13, Kapitel 1] zu lesen, welches eine historische und mathematische Übersicht gibt (Sie müssen die Beweise hierzu nicht im Detail studieren). Dies ist aber Ihnen überlassen.

References

[Cox13] David A. Cox. *Primes of the form $x^2 + ny^2$*. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2013. Fermat, class field theory, and complex multiplication.

[Sch85] Winfried Scharlau. *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[SO80] Winfried Scharlau and Hans Opolka. *Von Fermat bis Minkowski*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung.