Proseminar Algebra: Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Prof. Dr. Ben Heuer

Proseminar Sommersemester 2026

Gruppen sind fundamentale Objekte der Algebra, die sich in vielen Bereichen der Mathematik wiederfinden, zum Beispiel in Algebra, Geometrie, Zahlentheorie. Auch in den Naturwissenschaften haben Gruppen zahlreiche Anwendungen, vor allem dadurch, dass da sie als Symmetriegruppen von physikalischen Strukturen auftauchen, etwa in der Quantenmechanik oder in der Kristallographie.

Es liegt daher nahe, dass wir in der Algebra umgekehrt Gruppen untersuchen können, in dem wir beschreiben, auf welche Arten sie als Symmetriegruppen auftauchen. Genauer stellt sich heraus, dass es nützlich ist, Gruppen durch lineare Abbildungen von Vektorräumen wirken zu lassen. Mit anderen Worten stellen wir Gruppen als Symmetriegruppen von Vektorräumen dar. Der Teilbereich der Mathematik, der sich mit dieser Idee beschäftigt heißt daher Darstellungstheorie. Die Werkzeuge der Darstellungstheorie ermöglichen es uns, abstrakte Gruppenstrukturen in konkretere mathematischen Objekten wie Matrizen und Vektoren zu übersetzen. Auf diese Weise können wir tiefe Einsichten in die Struktur der Gruppen zu gewinnen.

In diesem Proseminar werden wir uns konkreter mit den zentralen Konzepten und Ergebnissen der Darstellungstheorie endlicher Gruppen beschäftigen. Wir werden uns dabei zunächst mit den grundlegenden algebraischen Eigenschaften von Gruppen und Darstellungen beschäftigen. Wir lernen dann die zentralen Methoden zur Konstruktion und Klassifikation von Darstellungen kennen, um einen Einblick in die vielseitigen mathematischen Anwendungen dieser Theorie zu erhalten.

Anmeldung: Schreiben Sie Herrn Heuer bis **22.03.26** eine Email mit Namen und Matrikelnummer und erwähnen Sie relevante Vorlesungen die Sie bereits besucht haben (Lineare Algebra I ist ausreichend). Falls Sie möchten, können Sie außerdem Präferenzen für Vorträge signalisieren. Falls es mehr Interessenten als Vorträge geben sollte, gilt: „First come, first served“.

Kontaktieren Sie bitte Herrn Heuer im Vorfeld des Seminars rechtzeitig (drei bis vier Wochen vor dem Seminar), um eine kurze Vorsprechung (ca 30 Minuten) zu vereinbaren. Hier haben Sie die Möglichkeit, die Ausarbeitung Ihres Vortrags zu besprechen und Fragen zu stellen.

Hinweise und Anleitungen zu Proseminaren und zur Vorbereitung eines gelungenen Vortrages finden Sie unter folgendem Link: bheuer.github.io/Handreichungen-Seminar.pdf.

Das Proseminar orientiert sich hauptsächlich an einer Schrift von Prof. Caroline Lassueur [Las23] welche nur die Lineare Algebra I vorraussetzt und das Thema sehr schön und zugänglich entwickelt. Wir ergänzen diese Schrift durch drei Bücher, die Standardwerke des Themas sind:

1. *Representations and Characters of Groups* von Gordon James und Martin Liebeck [JL01],
2. *Representation theory of finite groups¸* von Jean-Pierre Serre [Ser77],
3. *Linear representations of finite groups* von Benjamin Steinberg [Ste12].

Alle drei Bücher sind als ebooks in der Bibliothek der LUH verfügbar[1]. Beachten Sie, dass alle Texte auf englisch verfasst sind (wie in der Wissenschaft üblich), Ihr Vortrag soll aber als Tafelvortrag auf Deutsch gehalten werden. Falls es Fragen zur Übersetzung gibt, können wir diese natürlich bei der Vorbesprechung klären.

[1] Um diese herunterladen zu können, müssen Sie auf die Bibliotheksseiten über eduroam oder VPN zugreifen.

Vortrag 1: Grundlagen der Gruppentheorie *Referenz: [JL01, S.1-7 und S.104-5]*

Erinnern Sie zunächst an die Definition von Gruppen aus der linearen Algebra und besprechen Sie Beispiel 1.1.(1)-(5) (Abschnitt „Groups", S.1-3). Erklären Sie dabei vor allem ausführlich die Diedergruppe D_{2n} („dihedral group", Beispiel 1.1.(3)) um anhand von von regulären Polygonen zu illustrieren, wie Gruppen als Symmetriegruppe auftauchen können.

Besprechen Sie dann die Definitionen von Untergruppen, zyklischen Gruppen und Erzeugern (Abschnitt „Subgroups", S.3-4, insbesondere Beispiel 1.2.(1)-(4)).

Definieren Sie Gruppenhomomorphismen[2] (Abschnitt „Homomorphisms") inklusive Beispiel 1.4.

Besprechen Sie schließlich noch kurz Konjugationsklassen, in dem Sie in [JL01, §12] Definition 12.1, Satz 12.2 und Korollar 12.3 besprechen.

Vortrag 2: Definition von Darstellungen *Referenz: [Las23, §1]*

Führen Sie die Definition einer Matrix-Darstellung ein [Las23, Definition 1.1.b] und besprechen Sie Beispiele die Beispiele 1.(a) und (c).

Geben Sie zusätzlich die Beispiele der Standard-Darstellungen der dihedralen Gruppen D_4 [Ste12, Example 3.1.20] und D_8 [JL01, Examples 3.2.(1) und (2)].

Führen Sie dann $\mathrm{GL}(V)$ ein und geben Sie die allgemeinere Definition von Darstellungen [Las23, Definition 1.1.(a)]. Erklären Sie ausführlich, wie wir mithilfe der Wahl einer Basis zwischen Darstellungen von V und Matrix-Darstellungen übersetzen können (Remark 1.2).

Definieren Sie Homomorphismen von Darstellungen, sowie Isomorphismen und Äquivalenz (Definition 1.3, Remark 1.4). Illustrieren Sie das Konzept der Äquivalenz in dem Sie beweisen, dass Matrix-Darstellungen für unterschiedliche Wahlen von Basen äquivalent sind (Remark 1.5).

Vortrag 3: Irreduzible Darstellungen *Referenz: [Las23, §2]*

Definieren Sie G-invariante Unterräume (Definition 2.1.(a)) und irreduzible Darstellungen (Definition 2.1.(b)) sowie Unterdarstellungen (Definition 2.2). Besprechen Sie im Detail Bemerkung 2.3 zum Effekt von G-invarianten Unterräumen auf Matrixdarstellungen

Besprechen Sie dann die Beispiele 2.(a) und (b). Erklären Sie dann, wie man beweist, dass Darstellungen irreduzibel sind, indem Sie Beispiel 2.(d) besprechen mit folgender Veränderung: Statt ρ_3, diskutieren Sie bitte Beispiel 3.1.14 und Beispiel 3.1.18 aus [Ste12].

Beweisen Sie schließlich Satz 2.4, wofür Sie selbst einen Beweis ausarbeiten (Hinweis: Vielleicht hilft Ihnen dabei [Ste12, Satz 4.1.1],)

Vortrag 4: Der Satz von Maschke *Referenz: [Las23, §3]*

Erinnern Sie an das Konzept der direkten Summe von Untervektorräumen aus der linearen Algebra. Definieren Sie direkte Summen von Unterdarstellungen (Definition 3.1 und Bemerkung 3.2).

Beweisen Sie dann den Satz von Maschke (Theorem 3.4): Ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe und $W \subseteq V$ ein G-invarianter Unterraum, so gibt es ein G-invariantes Komplement zu W. (Hinweis: Vielleicht hilft Ihnen beim Verständnis [Ser77, §1.3, S.13-15]).

Führen Sie dann halbeinfache Darstellungen ein („semisimple representation", Definition 3.5) und folgern Sie, dass jede Darstellung von G halbeinfach ist (Korollar 3.6).

Falls Sie noch Zeit haben, besprechen Sie noch [Ste12, Beispiel 3.2.6] um zu zeigen, dass die Bedingung, dass G endlich ist, notwendig ist.

Vortrag 5: Der Gruppenring *Referenz: [Las23, §4]*

Führen Sie den Gruppenring KG ein (Definition 4.1) und erklären Sie kurz seine Ring-Eigenschaft. Führen Sie kurz Moduln ein (Definition A.1) und besprechen Sie dann ausführlich, wie man Darstellungen und KG-Moduln ineinander überführen kann (Satz 4.3).

Definieren Sie dann die reguläre Darstellung von G, indem Sie [Ste12, Definition 4.4.1] folgen.

Besprechen Sie das Beispiel [JL01, Beispiel 6.7] der regulären Darstellung von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Beweisen Sie schließlich noch Lemma 4.5 und skizzieren Sie Bemerkung 4.6.

---

[2] Beachten Sie in diesem Vortrag: Das Buch [JL01] benutzt eine etwas ungewöhnliche Konvention. Es evaluiert nämlich Funktionen ϑ auf der linken Seite: Es schreibt also $(x)\vartheta$ statt $\vartheta(g)$. Bitte verwenden Sie letztere Schreibweise.

Vortrag 6: Das Lemma von Schur *Referenz: [Las23, S.18-19, 21-22], [Ste12, §4.1]*

Geben Sie das „Lemma von Schur“ (Theorem 5.1) an, in dem Sie es wie in [Ste12, Lemma 4.1.6] in Termen von irreduziblen Darstellungen formulieren. Besprechen Sie ausführlich den Beweis (hierfür können Sie entweder [Las23, Theorem 5.1] oder [Ste12, Lemma 4.1.6] folgen).

Folgern Sie aus dem Lemma von Schur und dem Satz von Maschke die Klassifikation der Darstellungen endlicher abelscher Gruppen, in dem Sie Satz 6.1 (oder äquivalent [Ste12, Korollar 4.1.8]) und Theorem 6.2 beweisen, sowie Scholium 6.3 (siehe hierzu auch [Ste12, Korollar 4.1.9]).

Vortrag 7: Die reguläre Darstellung *Referenz: [JL01, §10]*

Ziel dieses Vortrags ist es, aus dem Lemma von Schur zu folgern, dass nur endlich viele irreduzible Darstellung von G gibt bis auf Isomorphie. Besprechen Sie hierfür zunächst Sätze 10.1 und 10.2 in [JL01] als Anwendung des Lemmas von Schur[3]. Besprechen Sie auch das Beispiel 10.3.

Beweisen Sie dann Theorem 10.5 in [JL01] und folgern Sie Korollar 10.7. Gehen Sie auch noch auf Beispiel 10.8 ein.

Vortrag 8: Der Charakter einer Darstellung *Referenz: [JL01, §13]*

Definieren Sie die Spur einer Darstellung, in dem Sie [JL01, §13] folgen[3] (Sie finden das entsprechende Material auch in [Ste12, §4.3] und [Ser77, §2.1], allerdings mit weniger Details):

Definieren Sie zunächst die Spur einer Matrix (Definition 13.1) und beweisen Sie die grundlegenden Eigenschaften aus Satz 13.2. Definieren Sie dann den Charakter einer Darstellung wie in Definitionen 13.3 und 13.4, sowie den Grad (Definition 13.7). Besprechen Sie Beispiel 13.6.(2).

Beweisen Sie dann die grundlegenden Eigenschaften der Spur, nämlich die Sätze 13.5 und 13.9 (siehe auch [Las23, Properties 7.5]).

Vortrag 9: Schur-Orthogonalität *Referenz: [Las23, §8 und S.19-20]*

Ziel dieses Vortrags ist es, eine weitere Anwendung des Lemmas von Schur zu beweisen:

Erklären Sie, wie die Menge $F(G, \mathbb{C})$ aller Abbildungen $G \to \mathbb{C}$ einen Vektorraum bildet (Notation 8.1.(1), siehe auch [JL01, S.133]). Erinnern Sie an die Definition eines Skalarproduktes[4] auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum [JL01, (14.2)]. Besprechen Sie dann Satz 8.2 und Bemerkung 8.3 in [Las23]

Beweisen Sie dann, dass die Matrix-Koeffizienten P_{ij} irreduzibler Darstellungen orthogonal sind, in dem Sie Lemma 5.4, Satz 5.5 und Theorem 5.6 in [Las23] und ihre Beweise besprechen.

Vortrag 10: Orthogonalität von Charakteren *Referenz: [Las23, S.27-29]*

In diesem Vortrag besprechen wir zentrale Anwendungen von Charakteren. Das Hauptziel des Vortrags ist es zu zeigen, dass eine Darstellung eindeutig durch ihren Charakter bestimmt ist.

Beweisen Sie dafür zunächst Theorem 8.4 in [Las23] als Anwendung von Vortrag 9. Besprechen Sie dann Korollar 9.1 (Lineare Unabhängigkeit von Charakteren) und Korollar 9.3 (Vielfachheiten).

Beweisen Sie dann Korollar 9.4, das Hauptresultat. Falls die Zeit dies zulässt, illustrieren Sie das Ergebnis anhand von [JL01, Beispiel 14.22]. Besprechen Sie schließlich noch Korollar 9.5.

Vortrag 11: Klassenfunktionen *Referenz: [Las23, §30-33]*

Führen Sie Klassenfunktionen ein (Notation 7.8, Notation 8.1.(2)). Besprechen Sie Lemma 7.9, welches sofort aus den Ergebnissen von Vortrag 8 folgt. Skizzieren Sie dann den Beweis von Theorem 9.6 (hierfür benötigen Sie Definition B.2) und Korollar 9.7.

Beweisen Sie Korollar 10.2, indem Sie dem Beweis von [Ste12, Satz 4.4.3] folgen. Beweisen Sie das kurze Theorem 10.3, welches die Zerlegung der regulären Darstellung erklärt. Besprechen Sie abschließend noch Korollar 10.5.

[3] Beachten Sie in diesem Vortrag: Das Buch [JL01] benutzt eine etwas ungewöhnliche Konvention. Es evaluiert nämlich Funktionen ϑ auf der linken Seite: Es schreibt also $(x)\vartheta$ statt $\vartheta(g)$. Ebenso schreibt es im Zusammenhang mit Darstellungen $G \to \mathrm{GL}(V)$ für $g \in G$ und $v \in V$ stets vg statt gv. Bitte verwenden Sie letztere Schreibweisen.

[4] Für Teilnehmende der Linearen Algebra II wurde dies zu diesem Zeitpunkt bereits eingeführt.

Vortrag 12: Charaktertafeln

Referenz: [Las23, §11], [JL01, §16]

Führen Sie Charaktertafeln von Gruppen ein (Definition 11.1). Besprechen Sie ausführlich die Beispiele 4 und 5.

Zeigen Sie, dass die Charaktertafel eine invertierbare Matrix ist [JL01, Satz 16.2].

Das Ziel des Vortrages ist nun der Beweis der Orthogonalitätsrelationen [JL01, Theorem 16.4]. Definieren Sie hierfür zunächst den Zentralisator [JL01, Definition 12.7] und beweisen Sie kurz [JL01, Theorem 12.8] und [JL01, Satz 14.5]. Folgern Sie dann Theorem 16.4. Illustrieren Sie diese anhand von Beispiel 16.5.(1).

Literatur

[JL01] Gordon James and Martin Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press, 2 edition, 2001.
[Link zum Bibliothekseintrag].

[Las23] Caroline Lassueur. *Character Theory of Finite Groups*, 2023. Skript zu einer Vorlesung im Sommersemester 2023
[Link zum Skript].

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
[Link zum Bibliothekseintrag].

[Ste12] Benjamin Steinberg. *Representation theory of finite groups: An introductory approach*. Universitext. Springer, New York, 2012.
[Link zum Bibliothekseintrag].