

# Seminar: Homologische Algebra

Prof. Dr. Ben Heuer

Seminar Sommersemester 2026

Homologische Algebra ist ein Teilgebiet der modernen Algebra, welches in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entstanden ist und sich danach rasant verbreitet hat. Ihr zentraler Gegenstand sind sogenannte Komplexe und deren Homologie, die es erlauben, wesentliche Informationen über kompliziertere mathematische Objekte in einfacheren algebraischen Objekten, wie Moduln und Vektorräumen, einzufangen und zu kodieren. Die homologische Algebra stellt somit zentrale Werkzeuge für zahlreiche andere Bereiche der Mathematik zur Verfügung, die von Topologie und Geometrie bis zu Zahlentheorie und Darstellungstheorie reichen.

In diesem Seminar besprechen wird zunächst einige grundlegende algebraische Definitionen dieser Theorie (Moduln, Folgen, Komplexe, sowie projektive, injektive und flache Moduln) und behandeln Kategorientheorie (abelsche Kategorien und Funktoren). Das Studium dieser mächtigen Sprachen ist für sich genommen bereits für sehr viele Bereiche der Mathematik nützlich.

Darauf aufbauend definieren wir dann abgeleitete Funktoren. Hierbei handelt es sich im Kern um eine vielseitige Konstruktion zum Bemessen von Obstruktionen. Wir besprechen diese anhand von zwei konkreten algebraischen Beispielen: den Tor-Funktoren, und den Ext-Funktoren.

Die grundlegenden Methoden, die wir in diesem Seminar besprechen, sind aber auch für andere (Ko)-Homologietheorien einsetzbar die in zahlreichen mathematischen Gebieten auftauchen: in der algebraischen Topologie (singuläre Kohomologie), der Analysis (z.B. de Rham Kohomologie, ...) der algebraischen Geometrie (Garbenkohomologie, étale Kohomologie, ...), der Zahlentheorie (z.B. Galoiskohomologie), der Darstellungstheorie (Gruppen- und Lie-Kohomologie) und so weiter.

Grundlage des Seminars ist ein Lehrbuch von Siegfried Bosch [Bos13], welches sowohl als Buch als auch als Ebook in der Bibliothek der LUH verfügbar ist<sup>1</sup>. Für einige Vorträge ziehen wir außerdem die Bücher [DF04] (ein Standardwerk der Algebra) und [Wei94] (ein Standardwerk der homologischen Algebra) heran. Beachten Sie, dass alle diese Bücher auf englisch geschrieben sind (wie in der Wissenschaft üblich), die Vorträge sollen aber in der Regel als Tafelvortrag auf Deutsch gehalten werden. Fragen zur Übersetzung können ggf. bei der Vorbesprechung geklärt werden.

**Anmeldung:** Wenn Sie Interesse am Seminar haben, schreiben Sie Herrn Heuer eine [Email](#) mit Namen und Matrikelnummer, am besten<sup>2</sup> bis **01.04.26**. Erwähnen Sie dabei relevante Vorlesungen die Sie bereits besucht haben. Sie können außerdem Präferenzen für Vorträge signalisieren.

**Voraussetzungen:** Lineare Algebra I, II und Algebra I. Das Seminar eignet sich sehr gut dazu, parallel zur Algebra II besucht zu werden; dies ist aber nicht notwendig.

**Kontaktieren Sie bitte Herrn Heuer im Vorfeld des Seminars rechtzeitig** (2-3 Wochen vor dem Seminar), um eine kurze Vorbesprechung (ca 30 Minuten) zu vereinbaren. Hier haben Sie die Möglichkeit, die Ausarbeitung Ihres Vortrags zu besprechen und Fragen zu stellen.

**Hinweise und Anleitungen** zu Proseminaren und zur Vorbereitung eines gelungenen Vortrages finden Sie unter folgendem Link: <https://www.bheuer.github.io/Handreichungen-Seminar.pdf>.

Ich freue mich auf das Seminar!

---

<sup>1</sup>Um dieses herunterladen zu können, müssen Sie über eduroam oder per VPN darauf zugreifen.

<sup>2</sup>Spätere Anmeldungen können gegebenenfalls auch noch berücksichtigt werden.

## Vortrag 1: Moduln – Grundlagen

Referenz:<sup>3</sup> [DF04, §10, S.337-347].

Besprechen Sie ausführlich die Definition von Moduln. Erläutern Sie, dass Moduln über einem Körper  $F$  genau die  $F$ -Vektorräume sind. Besprechen Sie dann die Beispiele (1) zum Fall  $M = R$ , (3) zu freien Moduln, und (4) zu Unterringen. Besprechen Sie außerdem Aufgabe 1 auf S.343.

Besprechen Sie ausführlich die Beispiele von  $\mathbb{Z}$ -Moduln (S.339) und  $F[X]$ -Moduln (S.340-341).

Führen Sie Untermoduln ein und besprechen Sie das Untermodulkriterium (Satz 1).

Geben Sie die Definition von Homomorphismen (§10.2, Definitionen (1) und (2)) und besprechen Sie die Beispiele (1)-(4) auf S.346. Definieren Sie Kern und Bild eines Homomorphismus (3) und beweisen Sie, dass diese Untermoduln sind (Aufgabe 1 auf S.350). Definieren Sie schließlich  $\text{Hom}_R(M, N)$  (Definition (4) auf S.345) und besprechen Sie Satz 2.(1)-(3) (S.346-347).

## Vortrag 2: Quotientenmoduln & Erzeugung

Referenz:<sup>3</sup>[DF04, §10, S.348-353].

Führen Sie den Quotientenmodul  $M/N$  ein sowie die natürliche Projektion  $\pi : M \rightarrow M/N$  (Satz 3 auf S.348). Definieren Sie die Summe von Untermoduln (S.349).

Besprechen Sie dann im Detail die drei Isomorphiesätze für Quotientenmoduln, in dem Sie den Sätzen 6-8 in [Bos13, §1.4, S.33-34] folgen und Beweise für diese Aussagen ausarbeiten.

Besprechen Sie dann Erzeugung von Untermoduln [DF04, §10.3, Definition (1)-(3)] mit den Beispielen (1)-(3) auf S.352. Definieren Sie schließlich noch direkte Produkte und direkte Summen, indem Sie Satz 5 (S.353) beweisen, sowie freie Moduln (S.354). Wenn die Zeit dies zulässt, erwähnen Sie noch Theorem 6, die Universaleigenschaft freier Moduln.

## Vortrag 3: Folgen & das Schlangenlemma

Referenz: [Bos13, §1.5]

Führen Sie Folgen von Moduln ein, indem Sie sich an den Definitionen in [Bos13, §1.5, S.38] orientieren. Definieren Sie Komplexe, Exaktheit, und kurze exakte Folgen. Besprechen Sie den Zusammenhang zu injektiven und surjektiven Homomorphismen, der oben auf S.39 erläutert wird (cf. [DF04, §10.5, Satz 22 und Korollar 23]). Besprechen Sie einige Beispiele für kurze exakte Folgen (z.B. eignen sich hierfür sehr gut (1)-(4) in [DF04, S.379-380]).

Diskutieren Sie ausführlich die Spaltung von kurzen exakten Folgen [Bos13, S.39-40] und diskutieren Sie kurz ob die bisher besprochenen Beispiele gespalten sind oder nicht.

Besprechen Sie zweitens ausführlich das Schlangenlemma [Bos13, Lemma 1, S.40-43] mit Beweis. Legen Sie dabei den Fokus auf Korollar 2 (S.43). Illustrieren Sie dieses anhand des Beispiels

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 6} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 1 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 3} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{array}$$

## Vortrag 4: Projektive Moduln

Referenz: [DF04, §10.5, S.385-391], [Bos13, §5.1]

Definieren Sie für  $R$ -Moduln  $D$  und  $L$  die Hom-Gruppe  $\text{Hom}_R(D, L)$ . Beweisen Sie Satz 27, insbesondere dass  $\text{Hom}_R(D, -)$  Injektionen erhält. Diskutieren Sie dann Lifts von Homomorphismen mit hilfreichen Gegenbeispielen (S.386-387) und beweisen Sie im Detail Theorem 28, welches besagt, dass  $\text{Hom}_R(D, -)$  “links-exakt” ist.

Besprechen Sie kurz wie  $\text{Hom}(-, -)$  sich mit direkten Summen verhält, Satz 29.

Führen Sie dann projektive Moduln ein, indem Sie ausführlich Satz 30 und Korollar 31 besprechen. Gehen Sie dann auf so viele der Beispiele auf den Seiten 391-392 ein wie möglich, zumindest aber (2), (4) und (7).

Beweisen Sie zuletzt noch, dass jeder Modul eine projektive Auflösung hat, [Bos13, §5.1, Definition 5 auf S.163 und Satz 8 auf S.165].

<sup>3</sup>Vortragende späterer Vorträge finden eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnitts in [Bos13, §1.4].

## Vortrag 5: Tensorprodukte & flache Moduln

Referenz: [Bos13, §4.1, §4.2]

Definieren Sie das Tensorprodukt  $M \otimes_R N$  zweier  $R$ -Moduln durch seine Universaleigenschaft, Definition 1 (S.107). Skizzieren Sie grob die Konstruktion des Tensorprodukts, Satz 3 und Bemerkung 4. Definieren Sie Tensorprodukte von Morphismen (§4.2, S.113).

Besprechen Sie dann ausführlich, dass  $- \otimes_R N$  ein rechtsexakter Funktor ist (Satz 1 auf S.113). Erklären Sie anhand des Beispiels  $R = \mathbb{Z}$ ,  $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und der exakten Folge

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dass  $- \otimes_R N$  nicht im allgemeinen links-exakt ist (S.116).

Definieren Sie flache Moduln (Definition 3 auf S.117) und besprechen Sie Satz 4.

Erwähnen Sie zuletzt noch ohne Beweis die Charakterisierung von flachen Moduln über Hauptidealringen, Satz 7.

## Vortrag 6: Homologie & lange exakte Folge

Referenz: [Bos13, §5.1, S.159-166]

Erinnern Sie [Bos13, §5.1] folgend noch einmal an den Begriff des Komplexes und erwähnen Sie den Begriff „Kettenkomplex“. Definieren Sie Zyklen („cycles“), Ränder („boundaries“) und Homologie von Komplexen. Definieren Sie auch Ko-Kettenkomplexe („cochain complex“) sowie Kozyklen, Koränder und Kohomologie.

Definieren Sie dann Homomorphismen von Komplexen und kurze exakte Folgen von Komplexen (S.160). Beweisen Sie als zentrales Resultat des Vortrags die lange exakte Homologiefolge, Satz 1 auf S.161. Erklären Sie, wie dieser Satz das Schlangenlemma verallgemeinert.

Führen Sie schließlich Homotopien ein (Definition 3, S.163) und beweisen Sie, dass homotope Morphismen die gleichen Morphismen auf der Homologie induzieren.

Besprechen Sie zur Motivation des Begriffs der Homotopie schließlich noch Lemma 9 (S.165): Zwei beliebige Morphismen zwischen projektiven Auflösungen sind homotop.

## Vortrag 7: Kategorientheorie

Referenz: [Bra16, §2, §3.2]

Ziel dieses Vortrags ist es, einige Kernkonzepte des bisher besprochenen Materials über Moduln zu abstrahieren in dem man den sehr nützlichen Begriff der Kategorie einführt.

Hierfür folgen wir dem Buch [Bra16]: Definieren Sie ausführlich Kategorien (Definition 2.2.2). Besprechen Sie Beispiel 2.2.7 (Mengen), 2.2.9 (Gruppen), 2.2.10 (Moduln), 2.2.11 (Ringe), und ggf. noch 2.2.19 ( $\mathbb{N}$ ). Definieren Sie kurz Isomorphismen (Definition 2.3.1) und Diagramme (Definition 2.4.1). Besprechen Sie ausführlich die duale Kategorie (Definition 2.6.3).

Besprechen Sie dann Funktoren (Definition 3.2.1), insbesondere kovariante und kontravariante Funktoren (Bemerkung 3.2.3). Besprechen Sie die Beispiele 3.2.5, 3.2.7, 3.2.10, 3.2.21.1. Überlegen Sie sich außerdem, wie Komplexe von  $R$ -Moduln eine Kategorie bilden, und dass Homologie  $H_n(-)$  ein Funktor von dieser Kategorie in die Kategorie der abelschen Gruppen definiert.

Führen Sie Isomorphismen von Kategorien ein (Definitionen 3.3.1 und 3.3.4) und besprechen Sie die Beispiele 3.3.5 und 3.3.7, welche bereits besprochene Ideen in neuem Licht erscheinen lassen.

## Vortrag 8: Abelsche Kategorien

Referenz: [Wei94, §A.1, §A.4]

In diesem Vortrag statuen wir Kategorien mit weiterer algebraischer Struktur aus, wir führen nämlich additive und abelsche Kategorien ein. Hierfür folgen wir [Wei94, §A].

Definieren Sie Monomorphismen („monics“, Definition A.1.5) und Epimorphismen („epis“, Definition A.1.5) in Kategorien. Definieren Sie initiale und terminale Objekte sowie Nullobjekte (A.1.6). Definieren Sie dann Kerne und Kokerne in Kategorien und besprechen Sie, dass diese im Fall von  $R$ -Moduln mit den üblichen Begriffen übereinstimmen.

Definieren Sie additive Kategorien, indem Sie §A.4 folgen. Diskutieren Sie das Beispiel von  $R$ -Moduln. Besprechen Sie schließlich abelsche Kategorien (Definition A.4.2 und Aufgabe A.4.1).

Definieren Sie exakte Folgen (S.425 unten). Überlegen Sie, wie man dadurch kurze exakte Folgen definieren kann, sowie links- und rechts-exakte Folgen. Definieren Sie, dass ein additiver Funktor  $F$  zwischen abelschen Kategorien exakt ist, wenn  $F$  exakte Folgen auf exakte Folgen schickt. Definieren Sie analog links-exakte und rechts-exakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien.

Erwähnen Sie noch ohne Beweis den Einbettungssatz von Freyd-Mitchell, Theorem 1.6.1 (S.25).

## Vortrag 9: Abgeleitete Funktoren

Referenz: [Bos13, S.166-170], [Wei94, §2.2]

Dieser Vortrag erreicht das erste große Zwischenziel des Seminars, nämlich die Definition von abgeleiteten Funktoren. Folgen Sie dafür [Bos13, §5.1] ab S.166 unten („Next let us consider...“):

Zeigen Sie, dass additive Funktoren direkte Summen erhalten. Definieren Sie ausführlich links-abgeleitete Funktoren wie in Satz/Definition 1 auf S.167. Hierbei wollen wir die Standardnotation „ $L_n F$ “ verwenden, statt der im Buch verwendeten Notation „ $F_n$ “. Besprechen Sie Bemerkung 11 über  $L^0 F$  für rechtsexakte Funktoren.

Diskutieren Sie im Detail die lange exakte Kohomologie-Folge Satz 12, das zentrale Resultat des Vortrags. Erwähnen Sie außerdem kurz Bemerkung 13.

Zeigen Sie, dass für exakte Funktoren  $F$  gilt, dass  $L_n F = 0$  für  $n > 0$  (Aufgabe 7 auf S.171).

Falls die Zeit dies zulässt, skizzieren Sie zuletzt, wie man die Konstruktion von linksabgeleiteten Funktoren auf allgemeine abelsche Kategorien verallgemeinern kann: Erwähnen Sie dafür projektive Objekte und Auflösungen [Wei94, §2.2, Definition 2.2.4 und §2.4].

## Vortrag 10: Tor-Gruppen

Referenz: [Bos13, §5.2, S.172-180]

Dieser Vortrag stellt das erste Beispiel eines abgeleiteten Funktors vor, [Bos13, §5.2] folgend:

Definieren Sie  $\text{Tor}_n^R(M, E)$  als links-abgeleitete Funktoren von  $-\otimes_R E$  (Definition 1 auf S.172). Besprechen Sie die lange exakte Tor-Folge (Satz 2). Diskutieren Sie als Anwendung die Aufgabe 1 aus S.180, indem Sie einen Beweis ausarbeiten. Diskutieren Sie dann, dass  $\text{Tor}_n^R$  auch als links-abgeleiteter Funktor von  $M \otimes_R -$  definiert werden kann, indem Sie den Beweis von Satz 3 skizzieren (S.173-176). Besprechen Sie als Anwendung Korollar 5.

Zeigen Sie schließlich, dass wir Tor benutzen können, um flache Moduln zu charakterisieren, indem Sie beweisen, dass  $M$  flach ist genau dann wenn  $\text{Tor}_1^R(M, N)$  für jeden  $R$ -Modul  $N$  verschwindet (eine Vereinfachung von Bemerkung 6 und Satz 7 auf S.177). Folgern Sie, dass projektive Moduln flach sind.

## Vortrag 11: Injektive Moduln

Referenz: [Bos13, §5.3, S.181-186]

Besprechen Sie [Bos13, S.181] folgend, wie wir  $\text{Hom}_R(M, -)$  und  $\text{Hom}_R(-, M)$  als links-exakte kovariante bzw. kontravariante Funktoren auffassen können. Erklären Sie, wie wir die Definition von projektiven Moduln in diesem Zusammenhang verstehen können. Definieren Sie davon ausgehend injektive Moduln (Definition 1) und erklären Sie Bemerkung 2.

Besprechen Sie dann ausführlich *kohomologische* Auflösungen: Das zentrale Ziel dieses Vortrags ist der Beweis der Existenz injektiver kohomologischer Auflösungen (Satz 3 auf S.183). Skizzieren Sie dafür zunächst Satz 5.(i)-(ii). Erwähnen Sie ohne Beweis Teil (iii) von Satz 5 und folgern Sie die Korollare 6 und 7. Besprechen Sie Lemma 8 und 9 und folgern Sie schließlich Lemma 4 und Satz 3.

## Vortrag 12: Ext-Gruppen

Referenz: [Bos13, §5.4, S.187-192]

Definieren Sie  $\text{Ext}_R^n(M, N)$  als den rechts-abgeleiteten Funktor von  $\text{Hom}_R(-, N)$ .

Definieren Sie außerdem  $\text{Ext}_R^n(M, N)$  als rechts-abgeleiteten Funktor von  $\text{Hom}_R(M, -)$ , das heißt mittels injektiver Auflösungen von  $N$  welche in Vortrag 11 eingeführt wurden. Erwähnen Sie Satz 2 ohne Beweis (falls Sie eine Beweisskizze liefern können, um so besser!)

Diskutieren Sie dann im Detail grundlegende Eigenschaften des Ext-Funktors, Bemerkung 3, Satz 4 (die lange exakte Folge), Korollar 5 (Ext für projektive Moduln) und Korollar 6 (Ext für injektive Moduln).

Überlegen Sie sich als Anwendungsbeispiel, wie  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  mittels der langen exakten Folge der Ext-Gruppen für die kurze exakte Folge  $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  berechnet werden kann.

Besprechen Sie schließlich ausführlich, dass die Gruppe  $\text{Ext}_R^1(M, N)$  Erweiterungen von  $M$  durch  $N$  parametrisiert, indem Sie Aufgabe 6 (S.191) ausarbeiten und detailliert vorstellen.

## Literatur

- [Bos13] Siegfried Bosch. *Algebraic geometry and commutative algebra*. Universitext. Springer, London, 2013.  
[\[Link zum Bibliothekseintrag\]](#).
- [Bra16] Martin Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie: Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*. Springer-Verlag, 2016.  
[\[Link zum Bibliothekseintrag\]](#).
- [DF04] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract algebra*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.  
[\[Link zum Bibliothekseintrag\]](#).  
Dieses Buch ist in der Bibliothek in Präsenznutzung verfügbar. Um es niemandem vorzuhalten, möchte ich Sie bitten, es zur Vorbereitung Ihres Vortrags nicht auszuleihen.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.  
[\[Link zum Bibliothekseintrag\]](#).